

LARS HOLZÄPFEL, SUSANNE PREDIGER, DANIELA GÖTZE, BETTINA RÖSKEN-WINTER, CHRISTOPH SELTER

Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien

Qualität im Mathematikunterricht wollen viele weiterentwickeln – aber gibt es überhaupt eine gemeinsame Idee, was Qualität ausmacht? Wir setzen auf fünf Prinzipien als gemeinsamen Rahmen, um kohärent zu arbeiten.

Immer wieder gibt es neue Ideen für den Mathematikunterricht, die an Lehrkräfte herangetragen werden: Das überarbeitete Schulbuch wirbt mit innovativen Zugängen, ein neues Arbeitsblatt wird über Instagram angepriesen, eine Kollegin schwärmt von einem gelungenen Unterrichtseinstieg oder das Ministerium führt ein neues digitales Tool ein ... Die tägliche Herausforderung für jede Lehrkraft besteht darin, (mehr oder weniger explizite) Entscheidungen zu treffen, ob und wie solche Ideen aufgegriffen und adaptiert werden können, um die Qualität des eigenen Mathematikunterrichts zu steigern.

Aber was genau macht die Qualität von Unterricht denn in den Tiefenstrukturen aus? Helfen die neuen Ideen wirklich, Lernende auch zum tiefen Denken anzuregen, oder geht es nur um das Trainieren von Fertigkeiten? Lassen sie die Lernenden

isoliert auf ihrem Niveau arbeiten oder regen sie auch die Kommunikation an?

Fünf Prinzipien geben Orientierung

Die didaktische Herausforderung, Unterrichtsqualität für den Mathematikunterricht fachdidaktisch zu bestimmen, muss berücksichtigen, dass es viele Listen von Qualitätsmerkmalen und didaktischen Prinzipien gibt (z. B. Kilpatrick u. a. 2001, Scherer/Weigand 2017, Hiebert/Grouws 2007, Heitzer/Weigand 2020). Manche sind sehr umfassend, aber nicht fachspezifisch (z. B. Klieme u. a. 2009, Meyer 2004), andere zu abstrakt, um sie unmittelbar in der täglichen Unterrichtspraxis nutzen zu können.

Wir haben daher die mathematikdidaktische und bildungswissenschaftliche Forschungsliteratur ausführlich gesichtet, verschiedene Modelle übereinandergelegt und immer wieder mit erfahrenen Lehrkräften, Aus- und Fortbildenden diskutiert, welche Qualitätsmerkmale als die wichtigsten erachtet werden können. Ausgewählt haben wir fünf Prinzipien



Abb. 1: Fünf Prinzipien für qualitätsvollen Mathematikunterricht

Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen



Der Erwerb tragfähiger Konzepte sowie die sichere Beherrschung von Strategien und Verfahren (inkl. Algorithmen, Formeln, ...) wird durch Verständnis fundiert. **Verständnis** für Konzepte, Strategien und Verfahren wird entwickelt, indem Lernende angeregt und unterstützt werden, ...

- ... sich mit sinnstiftenden (Kontext-)Situationen auseinanderzusetzen und ausgehend von intuitiven Deutungen und Vorgehensweisen Grundvorstellungen für Konzepte zu entwickeln und nachzuvollziehen (**Genetisches Prinzip**),
- ... Lernpfade ausgehend von intuitiven Vorgehensweisen zu beschreiten, die sukzessive schematisiert werden hin zu Verfahren (**Fortschreitende Mathematisierung bzw. Schematisierung**),
- ... enaktive, bildliche, verbale, tabellarische, graphische oder symbolische Darstellungen explizit zu vernetzen und diese Zusammenhänge zu verbalisieren, auch zur Begründung von Verfahren (**Darstellungsvernetzung**),
- ... angeleitet zu reflektieren über Eigenschaften und Beziehungen mathematischer Objekte und Operationen bzgl. der Auswirkungen von Variationen auf die Eigenschaften und Beziehungen der mathematischen Objekte (**Operatives Prinzip**).

Der Erwerb von **Fertigkeiten für Strategien und Verfahren** erfolgt nach dem Verständnisaufbau und wird dann für den Aufbau weiteren Verständnisses benötigt. Auch Fertigkeiten müssen konsolidiert werden, um kognitiv zu entlasten, und flexibilisiert bleiben, um vielfältig anwendbar zu sein.



Durchgängigkeit: Langfristiges Lernen ermöglichen

Da Lernen immer ein **Weiterlernen** ist, welches auf Gelerntem aufbaut und zu neuen Lernzielen hinführt, werden im Laufe der Schulzeit grundlegende Ideen, Inhalte, Aufgaben und Darstellungsmittel immer wieder auf verschiedenen Niveaus und unter Berücksichtigung unterschiedlicher Gesichtspunkte angesprochen, um deren Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung zu erzielen.

- Auf jeder Lernstufe werden diejenigen Aspekte des Lerngegenstands (z. B. Vorstellungen und Darstellungen) ausgewählt, die gut fortsetzbar und für den **langfristigen Kompetenzaufbau** entlang eines durchgängigen Lernpfads wichtig sind (**Prinzip der Fortsetzbarkeit**).
- Es werden Anknüpfungen zu vorausgehenden Lernstufen explizit hergestellt, indem die Bezüge für die Lernenden thematisiert werden. So erfolgt eine zunehmende Anreicherung, Ausdifferenzierung und Verknüpfung der mathematischen Kompetenzen (**Prinzip des Anknüpfens**).
- Lücken in den Verstehensgrundlagen müssen rechtzeitig aufgearbeitet werden, sodass die durchgängig nutzbaren Vorstellungen und Darstellungen, aber auch Fertigkeiten allen Lernenden zur Verfügung stehen (**Prinzip des Aufarbeitens**).

Kognitive Aktivierung: Aktive Lernprozesse anregen



Um nachhaltige Lernprozesse anzuregen, werden nicht nur rein praktische Handlungen, sondern herausfordernde kognitive Aktivitäten angeregt, mit denen die angestrebten Lernziele fokussiert werden können. Lernende sollten nicht nur rezepthaft vorgehen, sondern auch begründen, vergleichen, Darstellungen zuordnen, Situationen mathematisieren, mit Mathematik argumentieren u. v. m. Dadurch werden inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen gefördert. Mit Aufgaben, Medien, Arbeitsmitteln und der Gesprächsführung wird das Lernen von Mathematik in allen Phasen angeregt und unterstützt, sodass Lernende ...

- ... in **Erarbeitungsphasen** Konzepte in reichhaltigen Situationen nacherfinden, Zusammenhänge eigenaktiv entdecken und intuitive Vorgehensweisen zu Verfahren schematisieren (**Entdeckendes Lernen**),
- ... in **Systematisierungsphasen** ihre entwickelten Ideen, ersten Konzepte und Verfahren aktiv und im Austausch mit anderen systematisieren und sichern, dabei werden sie zielorientiert durch die Lehrkraft unterstützt (**Eigenaktives Ordnen**) und
- in **Übungsphasen** das Gelernte beziehungsreich üben, es flexibel anwenden und ihr Wissen vernetzen (**Produktives Üben**).



Lernenden-Orientierung & Adaptivität: Lernstände aufgreifen

Unterricht wird zielorientiert geplant im Hinblick auf die Lernziele und berücksichtigt dazu **lernendenorientiert** typische Lernstände:

- Lernpfade werden ausgehend von typischen Lernständen der Lernenden so konzipiert, dass eigene Lernwege beschritten werden können.
- Typische Vorstellungen von Lernenden und Hürden werden berücksichtigt (**Lernen auf eigenen Wegen**).

Adaptiver Unterricht berücksichtigt zusätzlich die heterogenen individuellen Lernstände:

- Individuelle Lernstände auf dem Lernpfad werden im Lehr-Lern-Prozess immer wieder stärkenorientiert wahrgenommen, tiefenscharf diagnostiziert und lernförderlich rückgemeldet (**Diagnosegeleitetheit**).
- Auf Basis der Diagnosen werden die jeweils nächsten Stufen im Lernpfad identifiziert und durch geeignete Aufgaben, Medien und Arbeitsmittel sowie angeleitete Diskussionen anvisiert (**Differenzierung nach Lernständen**).
- Der Unterricht wird unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lernmöglichkeiten der Lernenden durch reichhaltige Lernumgebungen gerecht, die verschiedene Wege und Anforderungsstufen ermöglichen. Sie sind offen für differenzierte Komplexitätsgrade und differenzierende Unterstützung, wie z. B. Formulierungs- oder Visualisierungshilfen (**Natürliche Differenzierung**).

Kommunikationsförderung: Über Mathematik sprechen



Kommunikation untereinander und mit der Lehrkraft ist essenziell zum Mathematiklernen.

- Das **Gespräch über Mathematik** regt dazu an, Gedanken zu vertiefen und verständlich auszudrücken, zu argumentieren, andere Perspektiven nachzuvollziehen und mit unterschiedlichen Ansichten umzugehen. Dadurch können die Lernenden ihre mathematischen Kompetenzen weiterentwickeln (**Lernen von- und miteinander**).
- Kommunizieren über Mathematik muss erst gelernt werden, die **mathematikbezogenen Sprachhandlungen** und dafür notwendigen Sprachmittel sind also auch Lerngegenstand. Dazu wird Sprache im Unterricht eingefordert, unterstützt und sukzessive aufgebaut für die Bewältigung der jeweils fachlich relevanten sprachlichen Anforderungen (**Fachbezogene Sprachbildung**).

Tab. 1: Fünf Prinzipien für qualitätvollen Unterricht

Icons: © DZLM

Abb. 2: Fünf Jobs
(= didaktische
Anforderungs-
situationen) der
qualitätsvollen
Unterrichts-
planung



(s. **Abb. 1**), die zahlreiche wichtige Qualitätsmerkmale enthalten und mit denen man in vielen unterrichtlichen Anforderungssituationen gute didaktische Entscheidungen treffen kann (Prediger u. a. 2022). Diese werden wir nachfolgend kurz skizzieren (Überblick und Ausdifferenzierungen s. **Tab. 1**).

Verstehensorientierung

Um rein oberflächliches Lernen zu vermeiden, müssen die mathematischen Konzepte, Strategien und Verfahren aufeinander bezogen (Kilpatrick u. a. 2001) und stets durch Verständnis fundiert werden (Freudenthal 1983). Während eine Zeit lang kontrovers diskutiert wurde, ob entweder das Verständnis von Konzepten oder die Fertigkeiten im Umgang mit Verfahren (inkl. Operationen, Formeln, Algorithmen, ...) wichtiger seien, herrscht inzwischen Einigkeit darüber, dass Verständnis für Konzepte, Strategien und Verfahren gleichermaßen aufgebaut werden muss. Die Verstehensorientierung ist damit ein zentrales Prinzip für die Gewichtung der fachlichen Lernziele zueinander.

Kognitive Aktivierung

Das Anregen von tiefgehenden, aktiven Denkprozessen (Renkl 2015) gilt in der Unterrichtsforschung als zentrales Qualitätsmerkmal, das beeinflusst, wie intensiv sich Lernende Mathematik erarbeiten (Klieme u. a. 2009, Hiebert/Grouws 2007). Anspruchsvolle Denkprozesse lassen sich nicht allein durch geeignete Aufgaben herstellen, sondern müssen auch in der Moderation durch die Lehrkraft immer wieder angeregt, unterstützt und aufrechterhalten werden (Henningsen/Stein 1997). In der Fachdidaktik wurden Ansätze der kognitiven Aktivierung (weit vor Etablierung dieses Namens) für unterschiedliche Phasen des Unterrichts ausdifferenziert – vom *entdeckenden Lernen* über das *eigenaktive Ordnen* hin zum *produktiven Üben*.

Durchgängigkeit

Das Prinzip der Durchgängigkeit ist eine Variante des *Spiralprinzips* (Bruner 1966), das die langfristigen Lernpfade über Unterrichtseinheiten hinweg und den Unterricht über Schuljahre miteinander vernetzend in den Blick nimmt: Wenn Lernende nachhaltig lernen sollen, ist es wichtig, bei den Lernzielen diejenigen Kompetenzaspekte zu fokussieren, die langfristig relevant und für spätere Lernstufen fortsetzbar sind. Die langfristigen Zusammenhänge entlang der Curriculumspirale sollten zudem explizit immer wieder durch Anknüpfung an Vorangehendes hergestellt werden, denn mit Verknüpfung verankert sich das Gelernte besser im Gedächtnis (Prediger u. a. 2023).

Lernendenorientierung & Adaptivität

Lernprozesse können nur gelingen, wenn typische Lernstände und Vorerfahrungen systematisch berücksichtigt und aufgegriffen werden. Zudem sollen Lernende eigene Lernwege beschreiten können, denn gerade der Verständnisaufbau sollte bei typischen Vorerfahrungen starten und diese anhand von Problemen in reichhaltigen (Kontext-)Situationen zu mathematischen Konzepten ausformen. Das Prinzip der *Adaptivität* fokussiert darüber hinaus nicht nur typische Lernstände der ganzen Klasse, sondern die heterogenen individuellen Lernstände der Einzelnen, z. B. durch Differenzierung nach Lernzielen (was ist das nächste Lernziel für dieses Kind?) und nach Anforderungsstufen (wie lassen sich die Lernaufgaben unterschiedlich unterstützen?).

Kommunikationsförderung

Der Austausch untereinander ist aus zwei Gründen entscheidend: Lernende erwerben anspruchsvolle Lernziele nur im (angeleiteten) Gespräch, weil sie dann angeregt werden, genauer über die Dinge nachzudenken und evtl. auch zu begründen oder zu widerlegen. Dadurch wird eine tiefere Verarbeitung des Wissens angeregt. Das Kommunizieren über Mathematik wird allerdings erst gelernt und sollte für viele Schülerinnen und Schüler auch unterstützt werden. Hierfür müssen systematisch und kontinuierlich Lerngelegenheiten geschaffen werden.

Alle fünf Prinzipien gehören zu den Kernbeständen der Mathematikdidaktik, wenn auch mit unterschiedlichen Namen und Zusammenfassungen. Entscheidend ist, wie wir sie tatsächlich nutzen, um in unterschiedlichen didaktischen Handlungssituationen didaktische Entscheidungen zu treffen.

Dies soll im Folgenden durch ein Fallbeispiel (Planung einer Unterrichtseinheit zum Thema Prozente in einer 7. Klasse) erläutert werden, das vor allem auch das Zusammenspiel der fünf Prinzipien

herausstellt, wie es für fünf typische **Anforderungssituationen** relevant ist (vgl. auch **Abb. 2**).

Unterricht planen und durchführen mit den Prinzipien: Ein Beispiel (Prozente Klasse 7)

Eine Lehrkraft will eine Unterrichtseinheit zur Prozentrechnung in Klasse 7 planen und durchführen. Sie arbeitet sich durch fünf didaktische *Anforderungssituationen* hindurch, die beim Planen, Durchführen und Reflektieren von Unterricht immer wieder relevant sind (**Abb. 2**).

Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren

Das Blättern durch den Lehrplan und das Schulbuch geben schon ein erstes Gefühl dafür, welche Lernziele in der Unterrichtseinheit zu Prozenten im Vordergrund stehen sollen: Das Lösen der drei Grundaufgaben *Prozentwert gesucht*, *Prozentsatz gesucht* und *Grundwert gesucht* – im Mittelpunkt stehen meist die Verfahren (Formeln, Dreisatz).

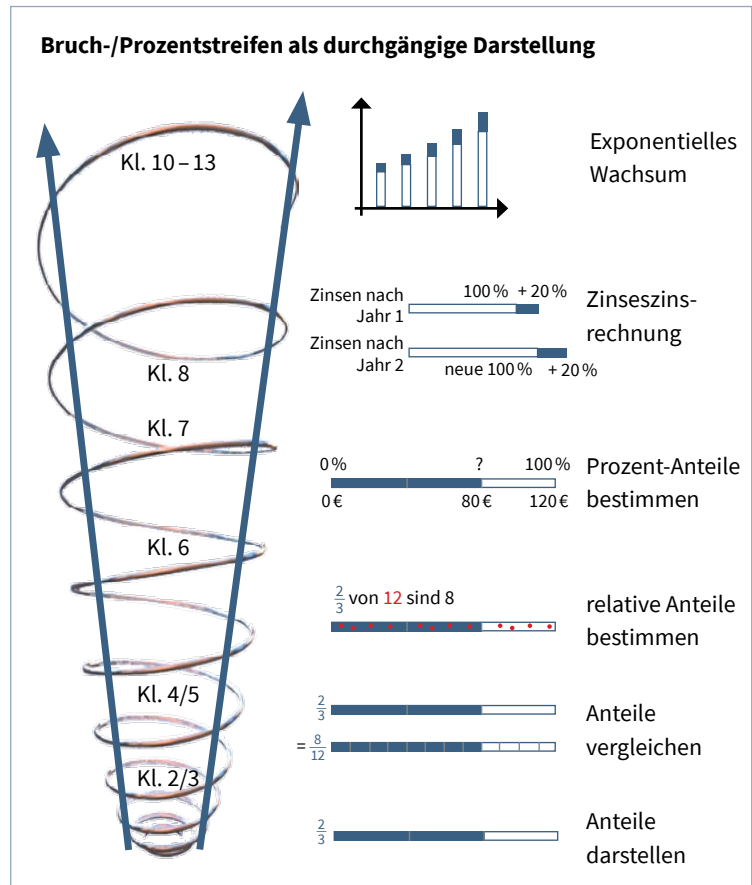
Doch die Lehrkraft will *verstehensorientiert* unterrichten und fragt sich daher, was überhaupt der Verstehenskern der Unterrichtseinheit ist. Nicht allein der Dreisatz, sondern die Anteilsvorstellung, die durch Prozente ausgedrückt wird, ist wichtig. Daher soll diese Vorstellung als zentrales Lernziel gesetzt werden.

Zunächst fragt sie sich, was die Lernenden mitbringen (*Lernendenorientierung*). Wenn die Anteilsvorstellung im Vordergrund steht, dann muss an Vorerfahrungen mit Brüchen angeknüpft werden.

Zudem überlegt sie, welche Lernziele der Prozenteinheit langfristig bedeutsam für weitere mathematische Themen sind (*Durchgängigkeit*): Zinsrechnung und exponentielles Wachstum sind die Themen, auf die die Einheit vorbereiten sollte. Die Prozentformel ist dafür ein wichtiger Baustein, vor allem aber das Verständnis, dass die Bestimmung von Prozentwerten (also das „Anteil-nehmen von“) eine Multiplikation ist. Dieser Gedanke wird in der *MatheWelt Alles Anteile oder was? Der Weg von Anteilen zur Exponentialfunktion* in dieser Ausgabe entfaltet. Dort wird der Prozentstreifen als durchgängige Darstellung genutzt (vgl. auch **Abb. 3**).

Die Lehrkraft weiß, dass die Lerngruppe noch nicht gut über Anteile sprechen kann. Das Erklären der Bedeutungen von Prozentwert und Grundwert braucht Sprachmittel wie „der Teil von einem Ganzen“. Da sie beides jedoch nicht voraussetzen kann, plant sie es als *sprachbezogene* Lernziele mit ein.

Wie kann der Lernpfad (damit gemeint ist die Sequenzierung der Lernziele und der Aufgaben durch eine Unterrichtseinheit hindurch) gestaltet sein, um *lernendenorientiert* alle bei ihren Vorerfahrungen abzuholen und sukzessive – *verstehensorientiert* –



zu abstrakten Konzepten und formalen Verfahren zu bringen? Um sich nicht alles selbst auszudenken, greift die Lehrkraft zurück auf ein Unterrichtsmaterial, das bereits in einem solchen Lernpfad organisiert ist (Pöhler/Prediger 2017) und das für jede Stufe des Lernpfads auch die nötige Sprache mitberücksichtigt.

Aufgaben und Medien auswählen und adaptieren

Der Fund eines ausgearbeiteten *verstehensorientierten* und *sprachbildenden* Unterrichtsmaterials entlang eines Lernpfads macht die Auswahl der Aufgaben leichter. Dennoch muss die Lehrkraft überlegen, für welche Phase des Unterrichts welche Aufgabe geeignet ist und welche weggelassen werden kann (vgl. **Tab. 2** für detaillierte Planungsfragen). Sie legt fest, wann das erarbeitete Wissen mit den Lernenden systematisiert und in einem Wissensspeicher gesichert werden soll. Entsprechend adaptiert sie das Unterrichtsmaterial.

Lernstände und Lernprozesse diagnostizieren und beurteilen

Da die Klasse nur widerwillig schreibt, macht die Lehrkraft frühzeitig transparent, dass die Klassenarbeit auch Erkläraufträge enthalten wird. Zum ersten Mal nehmen einige ihrer Lernenden die Erkläraufträge wirklich ernst. Dadurch beschäftigen sie

Abb. 3: Anteilsvorstellung und Prozentstreifen auf einer durchgängigen Curriculum-Spirale (nach Prediger u. a. 2023)

Lernziele setzen und Lernpfade konzipieren	
<p>Festlegen der inhalts- und prozessbezogenen Lernziele und ihrer Sequenzierung:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Welche der Lernziele sind zentral, welche können eher peripher behandelt werden, weil weitere Unterrichtseinheiten kaum darauf zurückgreifen? (Durchgängigkeit) • Was ist der Verstehens Kern der Unterrichtseinheit? Welche Konzepte, Strategien und Verfahren sollen damit fundiert werden? Zu welchen übergreifenden Bildungszielen tragen sie bei? (Verstehensorientierung) • Was bringen die Lernenden mit, woran in geeigneten Kontexten angeknüpft werden kann? Wie kann der Lernpfad durch die Unterrichtseinheit gestaltet sein, um Lernende 	<p>bei ihren Vorerfahrungen abzuholen und sukzessive zu abstrakten Konzepten, eleganteren Strategien und formalen Verfahren zu bringen? (Verstehensorientierung und Lernendenorientierung)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Welche Lernvoraussetzungen (insbesondere Verstehensgrundlagen) müssen bei einigen ggf. aufgearbeitet werden? Welche aufbauenden Lernziele differenzieren nach oben? (Adaptivität) • Welche Sprachhandlungen und Sprachmittel brauchen die Lernenden, um über die ausgewählten mathematischen Lernziele zu kommunizieren und zu denken? (Kommunikationsförderung)
Aufgaben und Medien auswählen und adaptieren	
<p>Festlegen der Aufgaben, Darstellungen, Methoden und Medien, mit denen die Lernziele der jeweiligen Phase erreichbar sind:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Welche Darstellungen sind langfristig einsetzbar? (Durchgängigkeit) • Welche Erarbeitungsaufgaben, Methoden und Medien können das Vorwissen der Lernenden mobilisieren und eigene Entdeckungen hin zu den ausgewählten Lernzielen ermöglichen? (Kognitive Aktivierung und Lernendenorientierung) 	<ul style="list-style-type: none"> • Welche Systematisierungsaufgaben, Methoden und Medien können den Austausch über eigene Lernwege initiieren und das Wissen konsolidieren? (Kognitive Aktivierung und Kommunikationsförderung) • Mit welchen Übungsaufgaben, Methoden und Medien kann das Gelernte in einem Lernen von- und miteinander beziehungsreich geübt, flexibel angewendet, vernetzt und langfristig verfügbar gemacht werden? (Kognitive Aktivierung und Kommunikationsförderung)
Lernstände und -prozesse diagnostizieren und beurteilen	
<p>Beobachten der Lernstände und -prozesse, um die Angebote nachsteuern zu können:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mit welchen Aufgaben können Denkweisen und Lernprozesse von Lernenden möglichst informativ sichtbar gemacht werden (eigene Denkwege und Strategien, typische Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten)? (Adaptivität durch Diagnosegeleitetheit) 	<ul style="list-style-type: none"> • Wie werden die nächsten Schritte auf dem Lernpfad für die Lernenden explizit? Wie werden die Lernerfolge der Lernenden wertgeschätzt? (Lernendenorientierung) • Welche Beurteilungskriterien sind für die priorisierten Lernziele relevant und wie werden sie für die Lernenden transparent? (Verstehensorientierung und Kommunikationsförderung)
Lernprozesse unterstützen & fördern	
<p>Planen, wie mögliche Hürden in den Lernprozessen ausgeräumt (Unterstützen) und die Lernenden zum Bewältigen von Hürden zunehmend befähigt (Fördern) werden können:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wie werden die Lernenden von ihren jeweiligen Lernständen und auf eigenen Lernwegen zum jeweils nächsten Schritt gebracht? (Lernendenorientierung und Adaptivität) • Wie können die Lernprozesse unterstützt werden, sodass sie trotz Herausforderungen bewältigt werden können (z. B. Formulierungshilfen, Ad-hoc-Hilfen, stärkere Vorstrukturierung, ...)? Wie nimmt die Unterstützung den Lernenden 	<p>nicht alles ab, sondern fördert sie, die Herausforderung in Zukunft auch allein zu bewältigen? (Adaptivität nach Anforderungsstufen)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wie können ggf. fehlende Lernvoraussetzungen aufgearbeitet werden? (Adaptivität nach Lernzielen und Durchgängigkeit) • Wie werden die Sprachhandlungen und Sprachmittel gefördert, sodass sich alle Lernenden zunehmend beteiligen können? (Adaptivität nach Lernzielen und Kommunikationsförderung)
Gemeinsame Gespräche moderieren	
<p>Planen, wann über was auch angeleitet kommuniziert werden muss:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Welche Lernziele sind für die Verstehensorientierung so wichtig, dass sie ausführlich mit den Lernenden besprochen werden sollen (in angeleiteten Kleingruppengesprächen oder Plenum)? Was schaffen die Lernenden auch untereinander? (Kommunikationsförderung und Verstehensorientierung) • Durch welche Methoden, Impulse, Arbeitsmittel kann die Kommunikation über bestimmte Ideen, Konzepte, Strategie 	<p>unterstützt werden? (Kommunikationsförderung und Adaptivität)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wie ist das Gespräch vorzubereiten und zu moderieren, sodass der rote Faden transparent bleibt und alle Lernenden wirklich mitdenken können? (Kommunikationsförderung und Kognitive Aktivierung) • Wie können Lernende, die an differenzierten Lernzielen entlang des Lernpfads arbeiten, im Gespräch von- und miteinander lernen? (Kommunikationsförderung und Adaptivität nach Lernzielen) <p style="text-align: right; font-size: small;">(Liste adaptiert nach Barzel u. a. 2011, S. 58ff.)</p>

Tab.2: Planungs-, Durchführungs- und Reflexionsfragen für qualitätvollen Unterricht

sich intensiver damit, wie sie den Grundwert erklären und wie sie in Aufgaben herausfinden können, was berechnet werden muss (*Verstehensorientierung* und *Kommunikationsförderung*). In der ersten Klassenarbeit wird bereits der Versuch, etwas schriftlich zu erklären, wohlwollend beurteilt. In späteren Klassenarbeiten werden die Ansprüche gesteigert.

Damit die Lernenden diese inhaltlichen und sprachlichen Anforderungen auch erfüllen können, beobachtet die Lehrkraft während der ganzen Einheit, inwiefern einzelne Lernende noch weitere Unterstützung und Lerngelegenheiten brauchen. Gerade das Schreiben von Rechengeschichten, die nach dem Grundwert fragen, erweist sich dabei als diagnostisch hoch informatives Aufgabenformat (*Lernendenorientierung*, *Verstehensorientierung*). Gleichzeitig wird durch das Schreiben die tiefere Verarbeitung von Wissen angeregt (Glogger u. a. 2009).

Die Lehrkraft beobachtet in den Erarbeitungsaufgaben, wie die Lernenden auf dem Prozentstreifen vielfältige Rechenwege finden (*Lernendenorientierung*) – auch Schülerinnen und Schüler, denen sie das nicht zugetraut hätte. Nicht alles ist immer richtig ausgerechnet, aber das Zutrauen, es zu probieren, lobt die Lehrkraft sehr, bevor sie die Überarbeitung unterstützt. Typische Fehler werden sofort abfotografiert, um mit der ganzen Klasse darüber zu sprechen (*Kommunikationsförderung*).

Bei einigen Lernenden fehlen relevante Verstehensgrundlagen, sie wissen zum Beispiel nicht, wie man auf dem Prozentstreifen mit Multiplikation und Division hoch- und runterrechnen kann. Daher nutzt die Lehrkraft *adaptiv* die in das Unterrichtsmaterial eingebauten Gelegenheiten, Grundlagen wie das Multiplikations- und Divisionsverständnis aufzuarbeiten (*Durchgängigkeit*).

Lernprozesse unterstützen und fördern

Der Prozentstreifen erweist sich für die meisten Lernenden intuitiv als eine sehr *verstehensförderliche* Darstellung, die eigene Denkwege sehr gut unterstützt. Dank einiger Formulierungshilfen gelingt es den meisten auch zunehmend, die Bedeutungen zu erklären (*Adaptivität*, *Kommunikationsförderung*).

Andere Lernende kann die Lehrkraft durch geschickte Nachfragen gut unterstützen, die Aufgaben zu bewältigen. Einzelne Schülerinnen und Schüler fordern allerdings immer wieder Hilfe ein (von ihr oder von ihren Mitlernenden), ohne erst einmal selbst zu denken. Bei ihnen würde das Denken „weg-unterstützt“ werden (keine *kognitive Aktivierung* wegen nicht passender *Adaptivität*). Um die selbstständige Arbeit mit dem Prozentstreifen auch für diese Lernenden zu fördern, klärt die Lehrkraft im Kleingruppengespräch noch einmal (durch explizites Anknüpfen an Anteilskonzepte bei Brüchen), wie man den Teil und das Ganze und deren Beziehung im

Prozentstreifen sieht. Erst danach wird der Prozentstreifen auch für diese Schülerinnen und Schüler zum Denkmittel (*Adaptivität* der Lernziele, *Kommunikationsförderung*).

Im Internet findet die Lehrkraft ein digitales Tool, mit dem man auf dem Prozentstreifen Schieberegler hin- und herschieben und damit die Ergebnisse ermitteln kann. Sie ist skeptisch, weil der nicht *kognitiv aktiviert*, sondern den Lernenden das Denken eher abnimmt (also wieder zu viel unterstützt). Dennoch kann dieses Tool sehr gut beim gegenseitigen Aufgabenstellen zum Kontrollieren eingesetzt werden. Dies regt die *Kommunikation* unter den Lernenden an, ohne das Denken „weg-zu-unterstützen“.

Gemeinsame Gespräche moderieren

Während die differenzierten Unterrichtsmaterialien auch das *individuelle* Arbeiten mit mehreren Lernstufen gut kanalisieren können und die Lehrkraft auch mit ihrer Kommunikation in Tandem- und Gruppenarbeitsphasen zufrieden ist, bleibt eine Unzufriedenheit mit den Plenumsgesprächen. Einerseits weiß die Lehrkraft, dass auch das (von ihr angeleitete) Unterrichtsgespräch entscheidend ist, um alle Lernenden an die anspruchsvollen Inhalte und an Sprachhandlungen wie das Erklären von Bedeutungen heranzuführen (*Kommunikationsförderung*). Andererseits ist es für viele Schülerinnen und Schüler schwierig, wirklich mitzudenken (*Lernendenorientierung*, *Kognitive Aktivierung*), gerade wenn sie vorher nicht genau dieselben Aufgaben und Lernwege selbst bearbeitet haben.

Die Lehrkraft plant deswegen genauer, an welchen Stellen die zentrale Besprechung wirklich notwendig ist. Dazu zählen ebenfalls Überlegungen zum gemeinsamen Gesprächsgegenstand. Während beispielsweise manche Lernende noch daran arbeiten zu verstehen, dass drei 10er-Schritte auf dem Prozentstreifen tatsächlich durch Multiplikation erfasst werden können, können andere komplexe Strategien zum Hoch- und Runterrechnen vorstellen. Den gemeinsamen Gesprächsgegenstand bilden dann multiplikative Strukturen am Prozentstreifen, und die stärkeren Lernenden können die zuerst vorgestellten Verstehensgrundlagen für ihre Begründungen nutzen lernen (*Durchgängigkeit*). Je besser beides visualisiert wird (etwa indem Hefteinträge unter der Dokumentenkamera gezeigt werden), desto eher können alle Lernenden mitdenken.

Auch in nicht perfekt vorbereiteten Stunden überlegt sich die Lehrkraft daher immer ein paar Fragen, um Lernende tatsächlich miteinander ins Gespräch zu bringen. Sie ermöglicht zunächst Gesprächsgelegenheiten in kleinen Gruppen, bevor die Lernenden ihre Ideen auch im Plenum kommunizieren, das schafft Sicherheit und erhöht die individuelle Redezeit (Holzäpfel 2023).

Unterricht reflektieren mit den Prinzipien

Die Lehrkraft blickt nach der Stunde rückblickend kritisch auf ihren eigenen Unterricht. Die fünf Prinzipien helfen ihr, den Blick auf die wichtigen Dinge zu richten. So fragt sie sich, ob sie die Lernstände ausreichend genau erfasst hat oder inwieweit ihre Aufgabenauswahl geeignet war, um die typischen Schwierigkeiten ihrer Lernenden zu diagnostizieren.

Rückblick und Ausblick

Prinzipien unterstützen bei didaktischen Entscheidungen und Reflexionen

Insgesamt illustriert das Beispiel der Unterrichtsplanung zur Prozentrechnung, wie die Kombination der fünf Prinzipien die Bewältigung der unterrichtlichen Anforderungssituationen leiten kann. In **Tab. 2** sind typische Planungs- und Entscheidungsfragen aufgeführt (wenn auch keineswegs vollständig), die für die jeweiligen Anforderungssituationen leitend sein können.

Die Prinzipien unterstützen dabei, bei der Rückschau auf den Unterricht auf relevante Tiefenstrukturen zu blicken und sich nicht allein von Sichtstrukturen (wie Lautstärke) leiten zu lassen.

Prinzipien liefern keine Rezepte

Das Beispiel zeigt natürlich auch, dass gute didaktische Fragen noch nicht automatisch zu der immer gleichen und perfekten Antwort führen: Unterricht ist viel zu komplex, als dass es einfache Rezepte für jede Entscheidung geben könnte. Die Prinzipien geben jedoch allgemeine Orientierungen, mit denen Ideen eingebaut, adaptiert und für die eigentlichen Lernziele fruchtbar gemacht werden können, um so – auch im Team an der Schule – an der Qualität von Unterricht zu arbeiten.

Auf das Zusammenspiel kommt es an

Die wichtigste Botschaft, die das vorgestellte Planungsbeispiel illustriert, lautet: Wer ein Prinzip absolut setzt, verpasst Wichtiges und erschwert die individuellen Lernprozesse. Im *Zusammenspiel* der fünf Prinzipien liegt die fachdidaktische Unterrichtsqualität:

- *Kognitive Aktivierung* bedarf der *Lernendenorientierung*, denn Vorstellungen und Vorerfahrungen, die Lernende mitbringen, spielen in ihren Denkprozessen eine wichtige Rolle.
- *Adaptivität* bedarf der *Kommunikationsförderung*: Nur differenzierte Arbeitsblätter (individuell) bearbeiten zu lassen genügt nicht. Erst das moderierte Gespräch unterstützt verstehensorientierte Lernprozesse.

- *Verstehensorientierung* bedarf der *Durchgängigkeit*: Je älter die Lernenden, desto schwieriger wird es für einige, Konzepte, Strategien und Verfahren zu verstehen, weil der Verstehensaufbau eine vorangehende Fundierung voraussetzt. Je konsequenter eine Schule *Durchgängigkeit* im Blick hat, desto besser lassen sich Lücken in der Bildungsbiografie aufarbeiten – je früher, desto besser.

In den unterrichtspraktischen Beiträgen dieser Ausgabe werden weitere Beispiele gegeben, die jeweils einige Prinzipien in ihren Zusammenhängen vertiefen.

Literatur

- Barzel, B./Holzapfel, L./Leuders, T./Streit, C. (2011): Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren – Cornelsen, Berlin.
- Bruner, J. (1966): Toward a theory of instruction – Harvard University Press, Harvard.
- Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures – Kluwer, Dordrecht.
- Henningsen, M./Stein, M. K. (1997): Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. – In: Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), S. 524 – 549.
- Glogger, I./Holzapfel, L./Schwonke, R./Nückles, M./Renkl, A. (2009): Aktivierung von Lernstrategien beim Schreiben von Lerntagebüchern: Wie spezifisch müssen Prompts sein? – In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23, S. 95 – 104.
- Holzäpfel, L. (2023): Kommunikationsförderung durch Think – Pair – Share? Auf die Aufgabe kommt es an! – In: mathematik lehren 238, S. 17 – 20.
- Holzäpfel, L./Pöhler-Friedrich, B. (2024): Wie passt das alles zusammen? Mathe-Welt in mathematik lehren 242.
- Hiebert, J./Grouws, D. A. (2007): The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. – In: Lester, F. K. (Hrsg.): Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning – Information Age, Charlotte, S. 371 – 404.
- Kilpatrick, J./Swafford, J./Findel, B. (2001): Adding it up. Helping children learn mathematics – National Academy Press, Washington.
- Klieme, E./Pauli, C./Reusser, K. (2009): The Pythagoras Study. Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. – In: Janik, T./Seidel, T. (Hrsg.): The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom – Waxmann, Münster, S. 137 – 160.
- Meyer, H. (2004): Was ist guter Unterricht? Cornelsen, Berlin.
- Pöhler, B./Prediger, S. (2017): Verstehensförderung erfordert auch Sprachförderung. – In: Fritz, A./Schmidt, S./Ricken, G. (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche – Beltz, Weinheim, S. 436 – 459.
- Pöhler, B./Prediger, S./Strucksberg, J. (2018): Prozente verstehen – Inklusive sprachbildende Unterrichtseinheit in Basis- und Regelfassung. OER unter sima.dzlm.de/um/7-001.
- Prediger, S./Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T. (2023): Durchgängigkeit von Darstellungen und Vorstellungen für den nachhaltigen Verständnisaufbau: Spiralcurriculum praktisch gewendet. MNU-Journal.
- Prediger, S./Götze, D./Holzapfel, L./Rösken-Winter, B./Selter, C. (2022): Five principles for high-quality mathematics teaching. – In: Frontiers in Education, 7(969212), S. 1 – 15.
- Renkl, A. (2015): Different roads lead to Rome: the case of principle-based cognitive skills. – In: Learning: Research and Practice, 1(1), S. 79 – 90.
- Scherer, P./Weigand, H.-G. (2017): Mathematikdidaktische Prinzipien. – In: Abshagen, M./ Barzel, B./ Kramer, J./ Riecke-Baulecke, T./Rösken-Winter, B./Selter C. (Hrsg.): Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten – Klett Kallmeyer, Seelze, S. 28 – 42.

1 | Wissenswert: Zum großen neuen Zehnjahres-Programm QuaMath

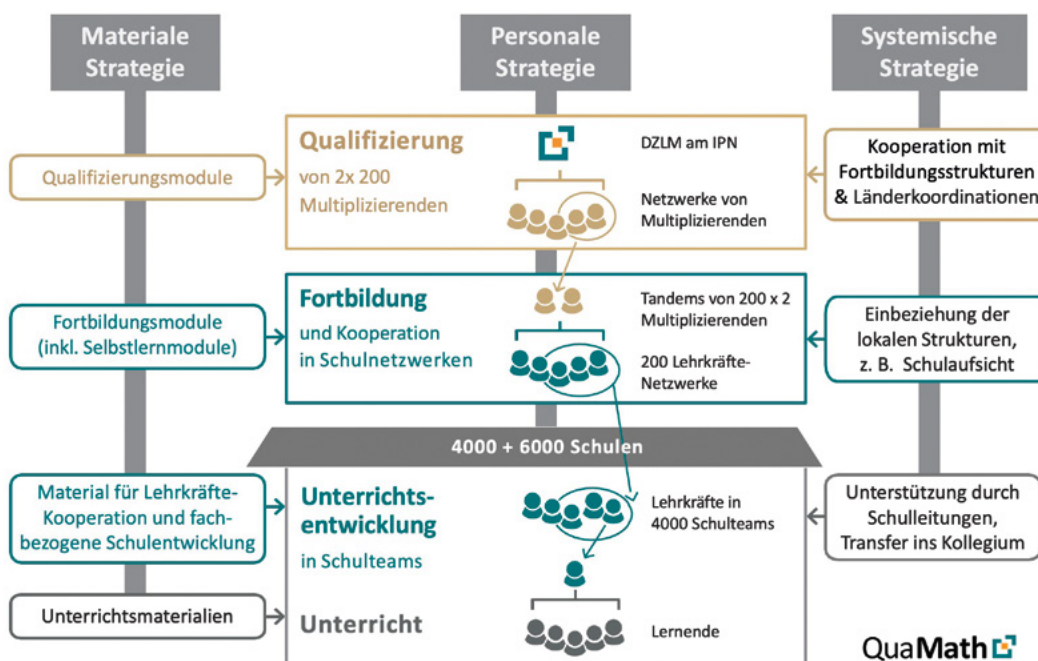


Webseite: quamath.dzlm.de

Die in dieser *mathematik lehren* Ausgabe diskutierten Prinzipien von qualitativem Mathematikunterricht bilden den Kern des Zehnjahres-Programms „**QuaMath** – Unterrichts- und Fortbildungs-**Qualität** in **Mathematik** entwickeln“ (2023–2033), das von der KMK und dem Deutschen Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik gestartet und durch die Länderkooperationen mit bestehenden Landesprojekten verknüpft wird.

QuaMath will zur Stärkung der mathematischen Bildung in Deutschland beitragen, indem bis zu 10.000 Schulen und deren Lehrkräfte bei der Weiterentwicklung ihres Mathematikunterrichts durch Fortbildungen, entsprechende Materialien und die Begleitung durch Multiplizierende unterstützt werden, die Qualität ihres Unterrichts weiterzuentwickeln, in schulinternen Schulteams und schulübergreifenden Netzwerken.

Die Fortbildungen und Materialangebote werden sich kohärent auf die fünf Prinzipien beziehen und an jeweils fünf unterrichtlichen Anforderungen ausgerichtet sein.



QuaMath-Struktur mit den drei Implementationsstrategien auf Schul-, Fortbildungs- und Qualifizierungsebene

Grafiken: © DZLM